



MSC 11M25

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ L -ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ**До Дык Там**

Белгородский государственный университет,

ул. Студенческая, 14, г. Белгород, 308007, Россия, e-mail: doductam140189@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются линейные комбинации функций, аналогов функции Харди, соответствующих L -функциям Дирихле. Исследуется распределение нулей, которые лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. Для функций указанного типа доказаны утверждения, аналогичные результатам А.А. Карацубы для дзета-функции Римана.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая, L -функция Дирихле.

1. Введение

Пусть $Z(t, \chi) = e^{i\theta(t, \chi)} L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$, где функция $\theta(t, \chi)$ подобрана так, что $Z(t, \chi)$ вещественна при вещественных t [1, с. 485]. Пусть далее

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + a_2 Z(t, \chi_2) + \dots + a_l Z(t, \chi_l), \quad (1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_l – произвольные вещественные числа, χ_1, \dots, χ_l – примитивные характеры Дирихле по модулям соответственно k_1, k_2, \dots, k_l . $Z(t, \chi)$ представляет собой аналог функции Харди [2, гл. 2].

В 1991 году А.А. Карацуба [1] поставил и решил своим методом задачу о нижней оценке числа нулей нечетного порядка функции $G(t)$ на отрезке $(T, T + H)$, где $H = T^{\frac{27}{82} + \varepsilon}$, ε – произвольное малое положительное число.

В настоящей работе получены оценки для числа нулей функции $G(t)$ на почти всех промежутках вида $(T, T + H)$, где $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \leq T \leq 2X$, ε_1 – сколь угодно малое фиксированное положительное число. Доказательства проводятся по схеме работы А.А. Карацубы [1]. Пусть $[k_1, k_2, \dots, k_l]$ – наименьшее общее кратное натуральных чисел k_1, \dots, k_l . Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \dots, k_l] \geq 3$, $\beta = 1/\varphi(K)$, $X \geq X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \leq T \leq 2X$. Если E_1 – множество тех T из промежутка $[X, 2X]$, для которых не выполняется неравенство

$$N_0(T + H, \chi) - N_0(T, \chi) \geq c_1 H (\ln T)^{\beta - \varepsilon}, \quad (2)$$

то для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^{1-0.5\varepsilon_1}$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ – произвольно малые фиксированные положительные числа и $K = [k_1, k_2, \dots, k_l] \geq 3$, $X \geq X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $H = X^{\varepsilon_1}$, $M = [XH^{-1}]$. При $m = M + 1, M + 2, \dots, 2M$ рассмотрим интервалы вида $[mH, mH + H]$. Тогда в каждом из этих интервалов, за исключением не более $M^{1-0.5\varepsilon_1}$ из них, содержится более чем $c_2 H (\ln X)^{\beta - \varepsilon}$ нулей нечетного порядка функции $G(t)$.



2. Вспомогательные утверждения.

Для доказательств теорем нам понадобятся леммы. Эти леммы близки к известным леммам [3, с. 1215].

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, h_1$ – положительные числа с условиями $\varepsilon_1 < 0.01, \varepsilon_2 < 1, h_1 < 1, r$ – натуральное число, $H = X^{\varepsilon_1}, P = \sqrt{\frac{kT}{2\pi}}, P_0 = \sqrt{\frac{kX}{\pi}}$. При $j = 0, 1, 2$ суммы $W_j(T)$ определяются равенствами:

$$W_0(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2} \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} e^{-\left(\frac{H+1}{2} \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_2(T) = \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2} < \lambda_1 < \lambda_2 \leq P} \frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} e^{-\left(\frac{H}{2} \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $B(\lambda) = ((P\lambda^{-1})^{ih_1} - 1)^r (\ln(P\lambda^{-1}))^{-r}$, $a(\lambda)$ – числа из приближенного функционального уравнения для аналога функции Харди-Сельберга $F(t, \chi)$ [1, с. 490].

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{j=0}^2 \int_X^{2X} W_j^2(T) \ll r^4 (1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2 (\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X H^{-1} Y^{12} L^7,$$

где $L = \ln X$.

Следствие 1. Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких из интервала $[X, 2X]$, для которых

$$\sum_{j=0}^2 W_j^2(T) \geq r^4 (1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2 (\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 X^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^7. \quad (3)$$

Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1) \ll X^\delta$.

Лемма 2. При обозначениях теоремы 2 справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{m=M}^{2M} W_j^2(mH) \ll r^4 (1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2 (\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M H^{-1} Y^{12} L^8. \quad (4)$$

Следствие 2. Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких $M \leq m \leq 2M$, для которых

$$\sum_{j=0}^2 W_j^2(mH) \geq r^4 (1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2 (\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M^{1-\delta} H^{-1} Y^{12} L^8. \quad (5)$$

Тогда для количества элементов этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка $\mu(E_1) \ll M^\delta$.



3. Схема доказательства теоремы 1.

Возьмем в Следствии 1 $\delta = 1 - 0.5\varepsilon_1$. Докажем, что для T , не принадлежащих множеству E_1 , выполняется неравенство (2). Тогда из следствия 1 легко следует утверждение теоремы.

Для T , не принадлежащих множеству E_1 , выполняется неравенство

$$W_0^2(T) + W_1^2(T) + W_2^2(T) < r^4(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r}h_1^2(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^4H^{-0.5}Y^{12}L^7. \quad (6)$$

Посредством символа \varkappa обозначим величину

$$r^2(1 + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{2r}h_1(\varepsilon_2^{-1} + 8\varepsilon_2^{-1}L^{-1}h_1^{-1})^2H^{-0.25}Y^6L^{3.5}.$$

1) По аналогии с работой [1], определим функцию

$$F(t) = G(t) \left| g \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2,$$

где $G(t)$ определяется равенством (1),

$$g(s) = g_j(s, \chi) = \sum_{\nu \leq Y} \frac{\beta(\nu)\chi_j(\nu)}{\nu^s}, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

и

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu) \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln Y} \right) & \text{если } 1 \leq \nu < Y = H^{0.01}, \\ 0 & \text{если } \nu \geq Y; \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p \equiv 1 \pmod{K}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{1/2} \quad \text{при } \operatorname{Res} > 1.$$

Посредством E обозначим подмножество $(T, T + H)$, на котором выполняется неравенство

$$\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t + u_1 + \dots + u_r)| du_1 \dots du_r > \left| \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t + u_1 + \dots + u_r) du_1 \dots du_r \right|,$$

Далее, следуя рассуждениям А.А. Карацубы [1] получаем неравенство:

$$I_1 + I_2 \geq I_3, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_E \left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t + u_1 + \dots + u_r) du_1 \dots du_r \right)^a dt, \\ I_2 &= \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t + u_1 + \dots + u_r) du_1 \dots du_r \right|^a dt, \\ I_3 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t + u_1 + \dots + u_r)| du_1 \dots du_r \right)^a dt, \end{aligned}$$



a – число из отрезка $(0, 1)$.

2) Для I_3 из [1] имеем оценку снизу

$$I_3 \geq c_4 h_1^{ra} H.$$

3) Для I_1 из [1] имеем оценку сверху

$$I_1^{2/a} \leq (\mu(E))^{2/a-1} h_1^{2r} H (\Sigma_0 + |W_0| + T^{-0.2}), \quad (8)$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda},$$

W_0 – тригонометрическая сумма из леммы 2.

Сумма Σ_0 оценивается аналогично тому, как это было сделано в [1] с учетом леммы 5 [1, с. 505]:

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda} \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta}. \quad (9)$$

Для суммы W_0 справедливо неравенство (6), поэтому

$$W_0 \ll \varkappa. \quad (10)$$

Таким образом из (8)-(10) получаем

$$I_1 \leq c_5 (\mu(E))^{1-a/2} h_1^{ar} H^{a/2} \left(\frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} \right)^{a/2}.$$

4) Подобно тому как это сделано в [1], для I_2 получаем оценку сверху

$$I_2^{2/a} \ll H^{2/a-1} (I_{21} + I_{22} + HT^{-0.2} h_1^{2r}),$$

где

$$I_{21} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F_1(t + u_1 + \dots + u_r, \chi) du_1 \dots du_r \right|^2 dt,$$

$$I_{22} = \int_T^{T+H} \left| \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F_2(t + u_1 + \dots + u_r, \chi) du_1 \dots du_r \right|^2 dt,$$

$$F_1(t, \chi) = 2\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\chi)} e^{i\varphi_1(t)} \sum_{\lambda \leq P_0^{1-\varepsilon_2}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it},$$

$$F_2(t, \chi) = 2\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\chi)} e^{i\varphi_1(t)} \sum_{P_0^{1-\varepsilon_2} < \lambda \leq P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it}.$$



Для I_{21} справедливо неравенство

$$I_{21} \ll H \left(\Sigma_1 \left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T} \right)^{2r} + |W_1| \right), \quad (11)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda \leq P} \frac{|a(\lambda)|^2}{\lambda},$$

W_1 – тригонометрическая сумма леммы 2.

Сумма Σ_1 оценивается аналогично сумме Σ_0 :

$$\Sigma_1 \ll \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta}. \quad (12)$$

Используя (6), получаем оценку суммы W_1 :

$$W_1 \ll \varkappa. \quad (13)$$

Из (11)-(13) следует

$$I_{21} \ll H \left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 \ln T} \right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa \right).$$

Аналогично тому, как это было сделано в 3) для оценки I_1 , для I_{22} получаем неравенство

$$I_{22} \ll H h_1^{2r} \left(\varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa \right). \quad (14)$$

Таким образом, получаем:

$$I_2 \ll H h_1^{ar} \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \left(\left(\frac{8}{\varepsilon_2 h_1 \ln T} \right)^{2r} \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + h_1^{-2r} \varkappa + \varepsilon_2 \frac{\ln T}{(\ln Y)^\beta} + \varkappa \right)^{a/2}.$$

Из полученных оценок для I_1 , I_2 и I_3 с учетом неравенством (7) найдем нижнюю границу для $\mu(E)$. Из этой оценки уже легко будет следовать, что для T выполняется (2).

Доказательство теоремы 2 с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Литература

1. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1991. – 55;3. – С.483-514.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
3. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ // Известия АН СССР. Серия Математическая. – 1984. – 48; 6. – С.1214-1224.



4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльброна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия Математическая. –1990. – 54;2, – С.303-315.

ON ZERO DISTRIBUTION OF LINEAR COMBINATIONS OF L -DIRICHLET FUNCTIONS LYING ON THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:doductam140189@gmail.com

Abstract. Linear combinations of functions which are analogous Hardy's functions, corresponding L -Dirichlet functions are studied. It is investigated the zero distribution which are on the critical line $\Re s = 1/2$. Assertions which are analogous some Karatsuba's results concerning Riemann's zeta-function have been proved for functions pointed out.

Key words: Rieman's zeta-function, non-trivial zeros, critical line, L -Dirichlet function.